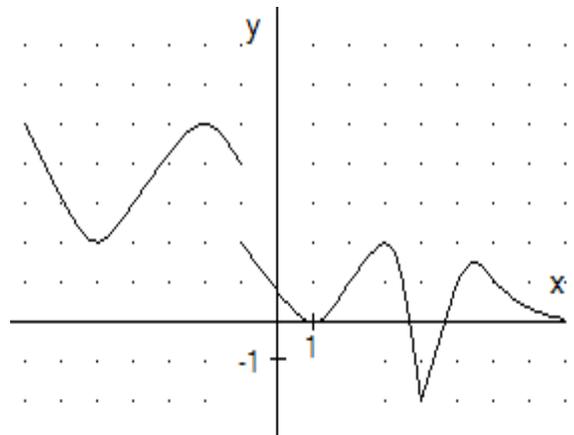


## Standards – Differentialrechnung

(Vorschlag erarbeitet von Melanie Schönauer im Rahmen einer FBA/ 0809;  
 Betreuung der FBA durch Dr. Walter Mayer)

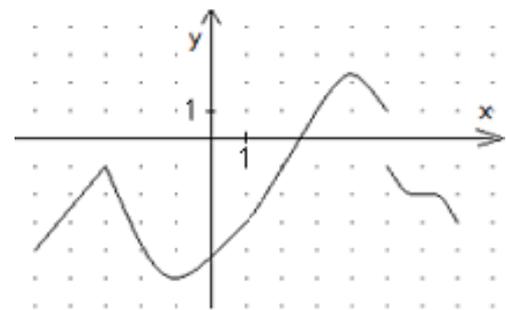
1. Der Punkt  $P(1/y)$  liegt auf dem Graphen der Funktion  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ .
  - a. Berechne die y-Koordinate von P.
  - b. Berechne den Differenzenquotienten der gegebenen Funktion im Intervall  $[1;3]$ .  
 Schreib die entsprechenden Rechenschritte an und veranschauliche das Ergebnis an Hand des Funktionsgraphen.
  - c. Berechne den Differentialquotienten an der Stelle  $x=2$ . Schreib die entsprechenden Rechenschritte an und veranschauliche das Ergebnis an Hand des Funktionsgraphen
  - d. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen in  $R3(-1)$ ?

2. Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (bitte ankreuzen)



- a.  $x = -1$  ist eine Unstetigkeitsstelle.  richtig /  falsch
- b. Die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[1; 3]$  ist 1.  richtig /  falsch
- c.  $f(2) = 0$   richtig /  falsch
- d.  $x = 4$  ist eine Unstetigkeitsstelle.  richtig /  falsch
- e.  richtig /  falsch
- f. Bei  $x = 4$  ist die Funktion nicht differenzierbar.  richtig /  falsch
- g. Der Differenzenquotient im Intervall  $[-5; -2]$  ist 1.  richtig /  falsch

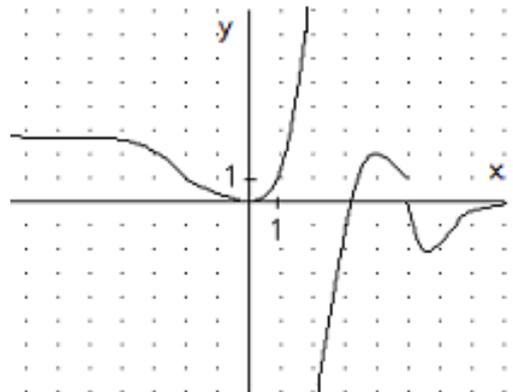
3. Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (bitte ankreuzen)



- a.  $f'(-3) = 0$   richtig /  falsch
- b. Der Differentialquotient an der Stelle  $x=4$  ist 0.  richtig /  falsch
- c.  $f$  ist im Intervall  $[0; 3]$  streng monoton steigend.  richtig /  falsch
- d.  $f'(0) < f'(-2)$   richtig /  falsch
- e.  $f$  ist im Intervall  $[-2; 0]$  linksgekrümmt.  richtig /  falsch
- f. Der Punkt  $(-1/-5)$  ist ein Wendepunkt.  richtig /  falsch
- g. Der Punkt  $(6/-2)$  ist ein Terrassenpunkt (Sattelpunkt).  richtig /  falsch

4. Ermittle anhand des rechts dargestellten Funktionsgraphen folgende Grenzwerte:

- |   |  |
|---|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$ | b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots$    | d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots$     |
| e. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots$   | f. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \dots$    |
| g. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \dots$    | h. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \dots$     |

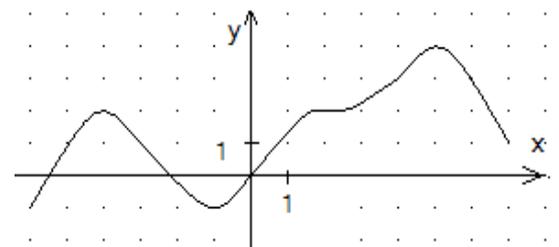


5. Bestimme die erste Ableitungsfunktion folgender Funktionen:

- |                                |                 |
|--------------------------------|-----------------|
| a. $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$    | $f'(x) = \dots$ |
| b. $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$ | $f'(x) = \dots$ |
| c. $f(x) = e^{2x}$             | $f'(x) = \dots$ |
| d. $f(x) = \ln(3x-1)$          | $f'(x) = \dots$ |

6. Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (bitte ankreuzen)

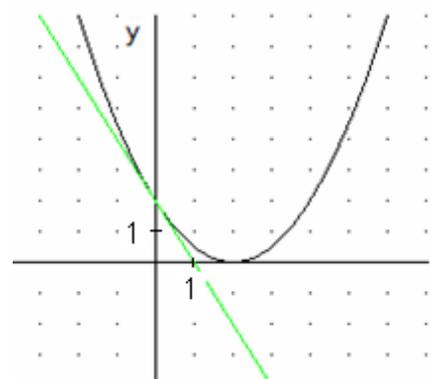
- |                  |  |
|------------------|--|
| a. $f(-4) = 2$   | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |
| b. $f'(-2) = 0$  | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |
| c. $f'(0) > 0$   | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |
| d. $f'(2) = 0$   | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |
| e. $f''(-4) = 0$ | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |
| f. $f''(-1) > 0$ | <input type="checkbox"/> richtig / <input type="checkbox"/> falsch |



g. Wie viele  $x$ -Werte gibt es im Intervall  $[-4; 3]$ , in denen die zweite Ableitung 0 ist? .....

7. Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt.

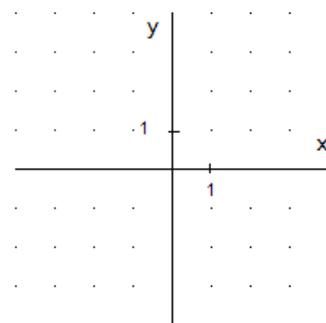
- Ermittle anhand der Zeichnung  $f'(0)$ :
- Wie viele Nullstellen hat die Funktion:
- Wie viele Wendepunkte hat die Funktion:
- In welchem Intervall ist die Funktion streng monoton steigend:
- Für welche  $x$ -Werte gilt  $f(x) = 2$ :
- Zu welchem Definitionsbereich gehört die Wertemenge  $[0; 2]$ :



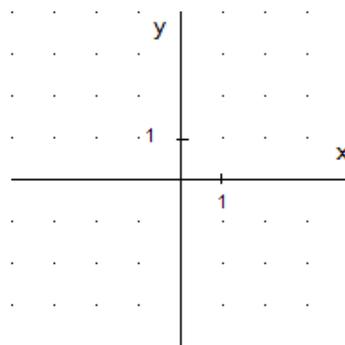
8. Angenommen der Graph einer Funktion  $f(x)$  verläuft durch  $P(2/5)$  und  $f'(2) = 0$ . Kann daraus gefolgert werden, dass  $P$  ein lokaler Extrempunkt ist?
- (1) ja, denn wenn in einem Punkt die erste Ableitung Null ist, verläuft die Tangente in diesem Punkt waagrecht. Dies gilt nur in Extrempunkten.
  - (2) nein, in Extrempunkten muss die zweite Ableitung den Wert 0 annehmen.
  - (3) nein, es könnte ja auch ein Terrassenpunkt sein.
  - (4) ja, denn wenn  $f'(2) = 0$  gilt folgt daraus, dass die Krümmung in diesem Punkt 0 ist.

Richtige Antwort: .....

9. Begründe mit Hilfe einer geeigneten Zeichnung, warum folgende Aussage nicht allgemeingültig ist:  
 „Schneidet eine Gerade einen Funktionsgraphen in genau einem Punkt, dann ist diese Gerade eine Tangente an den Funktionsgraphen“.



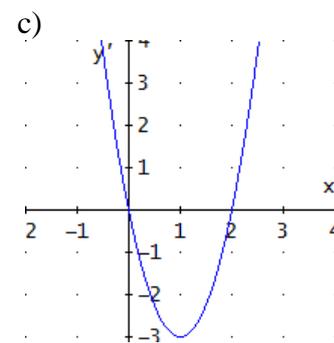
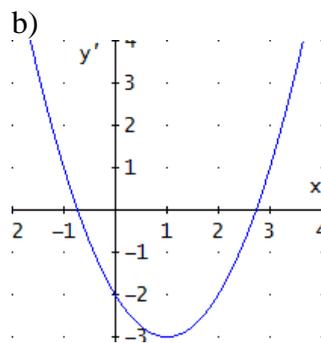
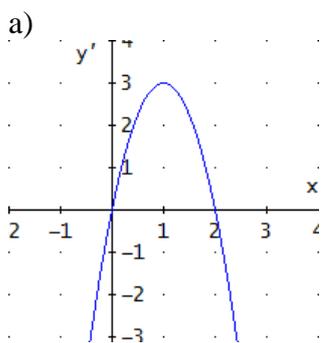
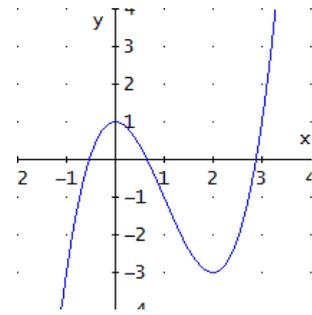
10. Begründe mit Hilfe einer geeigneten Zeichnung, warum folgende Aussage nicht allgemeingültig ist:  
 „Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit dem Funktionsgraphen genau einen Punkt gemeinsam.“



11. Angenommen der Graph einer Funktion  $f(x)$  verläuft durch die Punkte  $P(1/-2)$  und  $Q(5/1)$ . Ferner gelte  $f'(1) = 2$  und  $f'(5) = -1$ . Kann daraus gefolgert werden, dass die Funktion im Intervall  $[1; 5]$  ein lokales Maximum haben muss?
- (1) Nein, denn aus den Angaben folgt nur, dass der Funktionsgraph zuerst eine Links- dann eine Rechtskrümmung aufweist. Somit muss zwischen  $P$  und  $Q$  ein Wendepunkt, nicht aber ein Extrempunkt liegen.
  - (2) Ja, denn wenn der Graph der Funktion in  $P$  ansteigt und in  $Q$  abfällt, muss zwischen  $P$  und  $Q$  ein Maximum liegen.
  - (3) Ja, denn wenn  $P$  unterhalb und  $Q$  oberhalb der  $x$ -Achse liegt, muss der Funktionsgraph zwischen  $P$  und  $Q$  die  $x$ -Achse schneiden.
  - (4) Nein, denn der Funktionsgraph könnte zwischen  $P$  und  $Q$  ja unterbrochen also unstetig sein oder aber seine höchste Stelle in Form eines „Ecks durchlaufen“, also im Intervall  $[1; 5]$  gar nicht durchgehend differenzierbar sein.

Richtige Antwort: .....

12. Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt.  
Welcher der unten dargestellten Graphen stellt die Ableitungsfunktion von  $f$  dar?



13.  $f(x)$  ist eine Funktion 2. Grades, Ihr Graph verlauft durch  $P(0/2)$  und hat den Extrempunkt  $E(2/3)$ .  $g(x)$  ist eine Funktion 3. Grades, sie hat den Wendepunkt  $W(2/3)$  und im Punkt  $Q(0/2)$  weist ihr Graph den Anstieg  $k=4$  auf. Welche der Funktionen  $h_1(x)$  bis  $h_6(x)$  entspricht  $f(x)$  bzw.  $g(x)$  bzw. welche der folgenden Gleichungssysteme beschreiben die entsprechenden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  angemessen ?

Trage bitte hier die Nummer des richtigen Gleichungssystems ein:  
 $f(x)$  wird durch das Gleichungssystem ..... beschrieben  
 $g(x)$  wird durch das Gleichungssystem ..... beschrieben

a)

I:  $h_1(0) = 2$   
 II:  $h_1(2) = 3$   
 III:  $h_1'(2) = 3$

b)

I:  $h_2(2) = 0$   
 II:  $h_2(3) = 2$   
 III:  $h_2''(2) = 3$   
 IV:  $h_2'(2) = 9$

c)

I:  $h_3(0) = 2$   
 II:  $h_3(2) = 3$   
 III:  $h_3'(2) = 0$

d)

I:  $h_4(0) = 2$   
 II:  $h_4(2) = 3$   
 III:  $h_4'(0) = 4$   
 IV:  $h_4''(2) = 0$

e)

I:  $h_5(0) = 2$   
 II:  $h_5(2) = 3$   
 III:  $h_5''(2) = 4$   
 IV:  $h_5'(2) = 0$

f)

I:  $h_6(2) = 0$   
 II:  $h_6(3) = 2$   
 III:  $h_6''(2) = 3$

14. Der Druck  $T$  in einer Wasserleitung wird zu Testzwecken im Laufe von 10 Minuten gezielt verändert. Dabei gilt:
- (1) am Beginn beträgt er 2 Bar.
  - (2) die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall  $[0,4]$  beträgt 1 Bar.
  - (3) bis zum Ende der 6. Minute wird der Druck erhöht, anschließend gesenkt.
  - (4) die momentane Änderungsrate am Beginn ist kleiner als jene zum Zeitpunkt  $t=4$ .

Welcher der folgenden Graphen beschreibt den beschriebenen Sachverhalt angemessen? Trage bitte hier den Buchstaben des richtigen Gleichungssystems ein:

Richtiger Graph: .....

Begründe Deine Entscheidung, indem Du angibst, welche der vier gegebenen Bedingungen (1) bis(4) die falschen Graphen nicht erfüllen:

Falsch ist der Graph mit der Nummer ....., weil er folgende Bedingungen nicht erfüllt:

.....

Falsch ist auch der Graph mit der Nummer ....., weil er folgende Bedingungen nicht erfüllt: .....

